

Практическое занятие №3.

Задачи для самостоятельной работы студента

Решение задач по темам: Нахождение частичных пределов. Использование критерия Коши сходимости последовательности.

1) Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость следующих последовательностей

a) $x_n = a_0 + a_1 q + \dots + a_n q^n$, где $|a_k| < M$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) и $|q| < 1$.

b) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$. У к а з а н и е. Воспользоваться неравенством
 $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad (n = 2, 3, \dots).$

2) Для последовательности x_n ($n = 1, 2, \dots$) найти $\inf x_n$, $\sup x_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ и $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, если:

a) $x_n = 1 - \frac{1}{n}$.

b) $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$.

c) $x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}$.

d) $x_n = 1 + n \sin \frac{n\pi}{2}$.

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задачи из Лекции №3 (ФИТ)

Пример 1. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость $x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}$.

Пример 2. Найти верхний и нижний пределы $x_n = \frac{2n-1}{n+1} \sin \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Пример 3. Найти $\inf x_n$, $\sup x_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ для $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ($n = 1, 2, \dots$)

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

1. Доказать расходимость последовательности $x_n = (-1)^n$.

△ Рассмотрим две подпоследовательности этой последовательности: $x_{2k} = 1$ и $x_{2k-1} = -1$ ($k = 1, 2, \dots$). Очевидно, что $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = 1$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = -1$.

Таким образом, последовательность $\{(-1)^n\}$ имеет две предельные точки: 1 и -1, а поэтому не может быть сходящейся, поскольку сходящаяся последовательность имеет только одну предельную точку. ▲

1. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности $\{x_n\}$, где $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{k^2}$.

△ В силу критерия Коши достаточно доказать, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. Для этого оценим $|x_n - x_{n+p}|$. Имеем

$$|x_n - x_{n+p}| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin k}{k^2} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2}.$$

Так как $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, то

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} < \\ &< \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right) = \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Поэтому $\forall n, p \in \mathbb{N}$ имеем

$$|x_n - x_{n+p}| < 1/n. \quad (1)$$

Зададим теперь произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $N = [1/\varepsilon]$. Тогда $\forall n > N$ выполняется неравенство $n \geq [1/\varepsilon] + 1 > 1/\varepsilon$, откуда $1/n < \varepsilon$. Следовательно, $\forall n > N$ и любого натурального числа p , используя неравенство (1), получаем $|x_n - x_{n+p}| < 1/n < \varepsilon$. Это доказывает фундаментальность последовательности $\{x_n\}$. $\blacktriangle$

85 $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$

« Пусть $\forall \varepsilon > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \dots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right| \leq \\ &\leq \frac{|\sin(n+1)|}{2^{n+1}} + \frac{|\sin(n+2)|}{2^{n+2}} + \dots + \frac{|\sin(n+p)|}{2^{n+p}} \leq \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} + \dots = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon \end{aligned}$$

при $n > -\log_2 \varepsilon$ и всех натуральных p . $\blacktriangleright$

88. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость последовательностей (x_n) , где:

а) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N};$ б) $x_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln n}, \quad n \in \mathbb{N}.$

« Пусть ε — произвольное число из интервала $]0, \frac{1}{2}[$.

а) Поскольку

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p},$$

а при $p = n$

$$|x_{n+p} - x_n| > \frac{1}{2} > \varepsilon$$

для всех n , то последовательность расходится.

б) Расходимость последовательности следует из того, что

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + \dots + \frac{1}{\ln(n+p)} > \frac{p}{\ln(n+p)} > \frac{p}{n+p} = \frac{1}{2} \quad \text{при } n = p. \quad \blacktriangleright$$

Для последовательности (x_n) найти $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ и $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, если:

92. $x_n = (-1)^{n-1} \left(2 + \frac{3}{n} \right).$

« Так как все элементы последовательности (x_n) содержатся в последовательностях $x_{2n-1} = 2 + \frac{3}{2n-1}$, $x_{2n} = -2 - \frac{3}{2n}$ и $x_{2n} < x_{2n-1}$, причем последовательность (x_{2n-1}) монотонно убывает, а последовательность (x_{2n}) возрастает, то

$$x_1 = \sup\{x_n\} = 5, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = 2,$$

$$x_2 = \inf\{x_n\} = -\frac{7}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = -2. \quad \blacktriangleright$$